



01

从UIRT到MIRT

理论假设

单维性、局部独立性、真实性、项目特征曲线单调递增、非速度测验

立足点

从项目-个体的角度认为被试的正确作答率反映出其能力大小。

“理解人的行为甚至与理解整个宇宙星系一样复杂。”

"The stellar universe is not so difficult of comprehension as the real actions of other people."

马塞尔·普鲁斯特 《追忆似水年华》

Marcel Proust, *Remembrance of Things Past*



■ 旧定义

- 学生从所阅读的内容中获取了多少信息量？
(Burgess 1921, p. 18)

■ 国家教育进步评估 (NAEP)

- 阅读包括对文本内容的一般性理解、思考、对写作目的的认识(Perie et al. 2005)。
- 使用**混合题型**，包括选择题、开放性问答等对阅读能力进行测量。

- 测验包含对多个子内容的测量；
- 测验包含多种题型（选择题、简答题、论述题）。



测验出现明显的多维性

➤ “维度”理解成为：

在潜在特质空间中互相独立的潜在特质个数。

➤ 一个 k 维的潜在特质空间表示为：

$$\mathbf{H} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k)$$

向量!

(Multidimensional Item Response Theory, MIRT)

含义

多维项目反应理论描述被试在完成测验项目或任务时与潜在的多维特质之间的关系，并且确定被试的特质在多维笛卡尔空间的位置。

多维性

项目间：一个题目只受一个能力维度影响，整个测验受多个能力维度影响。

项目内：一个题目的受多个能力维度影响。

因素分析
(FA)

从题目反应矩阵中找出少量的因子来反应测验的结构。



单维项目反应
理论 (UIRT)

寻找人和题目之间的关系，通过估计题目参数和能力参数来预测被试对题目的作答反应概率。

➤ 单调性假设：

指正确作答该题目的概率随着向量 θ 中任何元素的增加而增加。

➤ 局部独立性假设：

任意考生在任意题目上的作答反应假定仅受考生向量 θ 和题目向量 η 的影响（Reckase, 2009）。

θ 坐标信息的组合方式

补偿模型

完成某项任务所需的能力之间可以相互补偿，在某一能力上的不足，可以被其他优势技能所补偿。

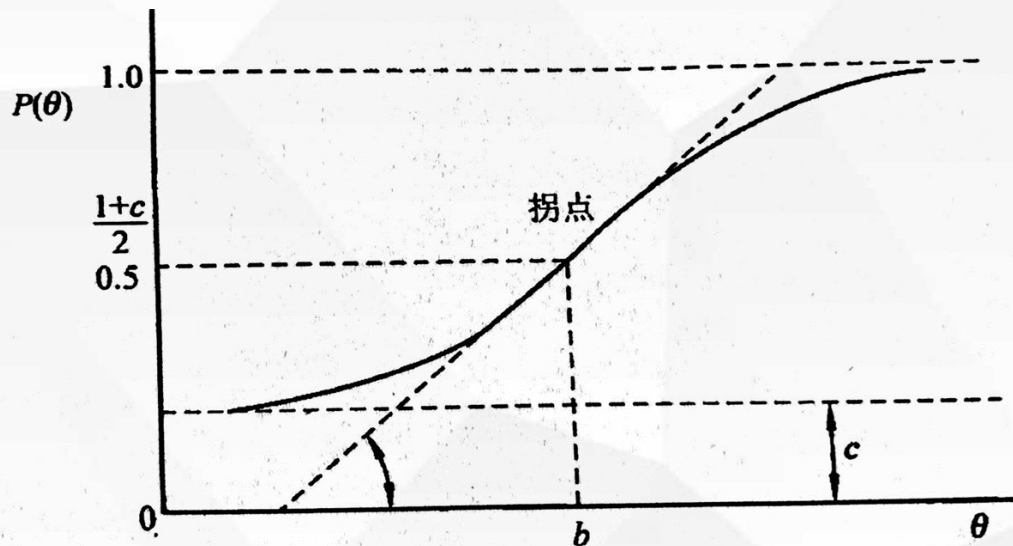
非补偿模型

只有掌握了这个项目所涉及到的所有技能才能答对该题，技能之间是相互独立的。

- MIRT模型通过向量 θ 将考生特定的位置与在题目上获得特定分数的概率相关联 (Reckase, 2009)。
- 在MIRT中，考生 i 的反应被定义为被试的参数向量 (θ_i) 与题目的参数向量 (η_j) 的函数，可以表示为，

$$P_j(\theta_i) = f(\theta_i, \eta_j)$$

其中 $\theta_i = (\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{im})$ 。



被试参数和正确作答概率之间的关系不再一一对应。

几乎有无限种能力参数的组合可以产生相同的正确作答概率。

➤ 多维两参数 *logistic* 二级评分模型

$$P(U_{ij} = 1 | \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{a}_i, d_i) = \frac{e^{\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i}}{1 + e^{\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i}}.$$

$$\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i = a_{i1}\theta_{j1} + a_{i2}\theta_{j2} + \cdots + a_{im}\theta_{jm} + d_i = \sum_{\ell=1}^m a_{i\ell}\theta_{j\ell} + d_i.$$

$\boldsymbol{\theta}_j$: $1 \times m$ 的能力向量

\mathbf{a}_i : $1 \times m$ 的题目区分度向量

d_i : 截距参数

➤ 多维两参数 *logistic* 二级评分模型

$$P(U_{ij} = 1 | \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{a}_i, d_i) = \frac{e^{\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i}}{1 + e^{\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i}}.$$

$$\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i = a_{i1}\theta_{j1} + a_{i2}\theta_{j2} + \cdots + a_{im}\theta_{jm} + d_i = \sum_{\ell=1}^m a_{i\ell}\theta_{j\ell} + d_i.$$

$$p_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{1 + e^{-1.7 \mathbf{a}_i(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}_i)}}$$

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{a}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\theta} + d$$

- 多维两参数 *logistic* 二级评分模型

$$P(U_{ij} = 1 | \theta_j, \mathbf{a}_i, d_i) = \frac{e^{\mathbf{a}_i \theta_j' + d_i}}{1 + e^{\mathbf{a}_i \theta_j' + d_i}}.$$

- 等概率线： $k = \mathbf{a}_i \theta_j' + d_i$

在同一条直线 k 上，所有的能力向量组合都能够产生相同的正确作答概率。

► 题目1:

考察逻辑推理能力和运算能力， θ_1 和 θ_2 ;

区分度分别是0.75和1.5 ($a=[0.75 \ 1.5]$);

截距参数 d 等于-0.7。

当正确作答概率等于0.5的时候， $k=0$ ，那么直线就可以写成
 $0.75\theta_1+1.5\theta_2-0.7=0$ 。

$$\theta_2 = -.5\theta_1 + \frac{.7}{1.5}$$

➤ 题目1:

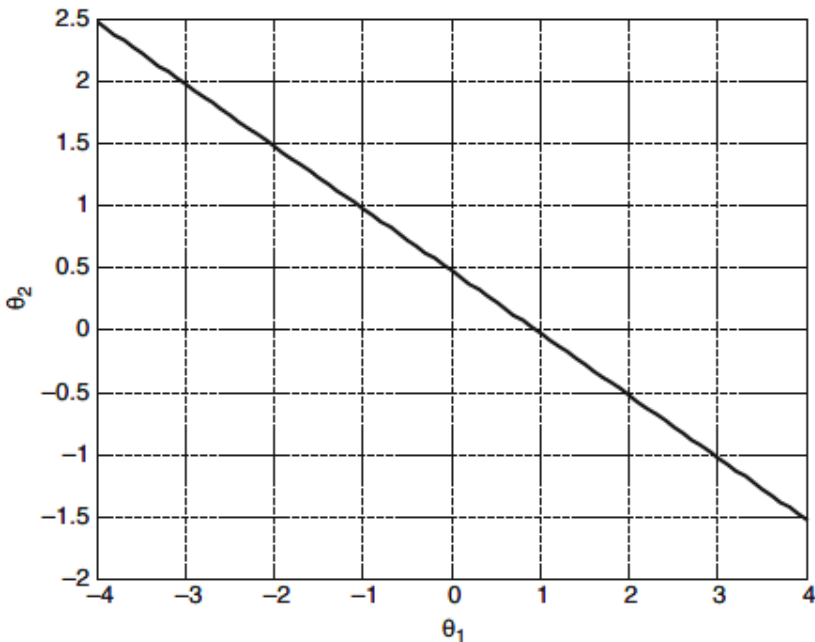
考察逻辑推理能力

区分度分别是0.75和1.5

截距参数 d 等于-0.7

当正确作答概率等于0.5时

$$0.75\theta_1 + 1.5\theta_2 - 0.7 = 0.$$

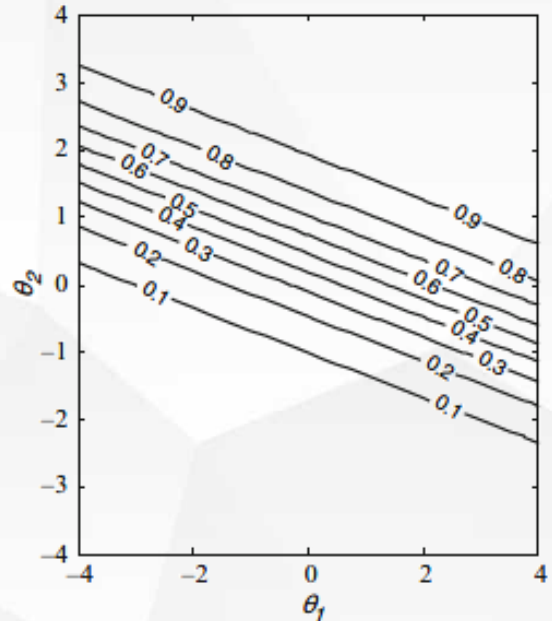
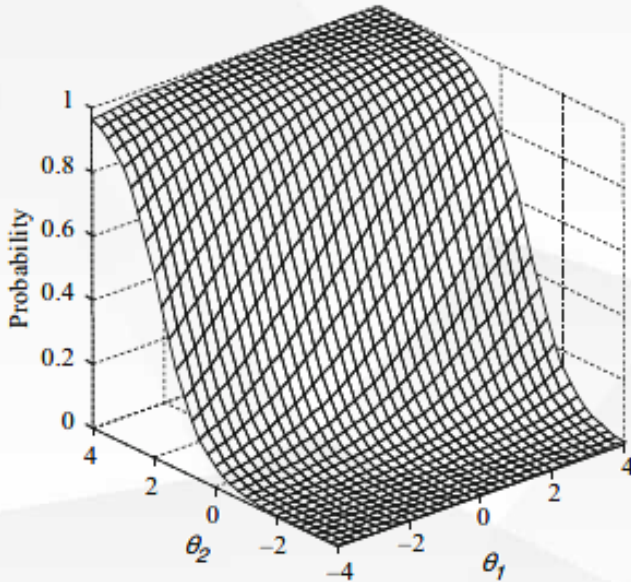


$$\theta_2 = -.5\theta_1 + \frac{.7}{1.5}$$



多维项目反应理论：项目反应曲面 (Item Response Surface, IRS)

➤ 在 (θ_1, θ_2) 平面上，以正确作答概率 P 为高。

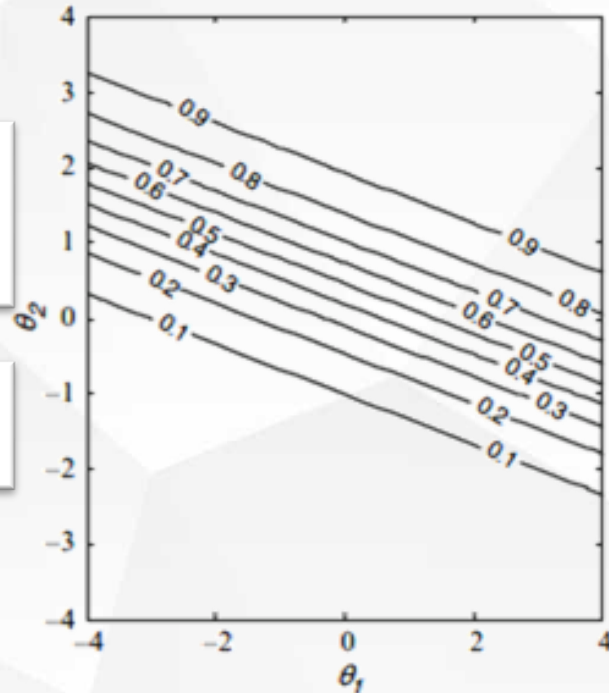


多维项目反应理论：项目反应曲面 (Item Response Surface, IRS)

➤ 在 (θ_1, θ_2) 平面上，以正确作答概率 P 为高。

区分度分别是0.75和1.5 ($a=[0.75 \ 1.5]$) ;
截距参数 d 等于-0.7。

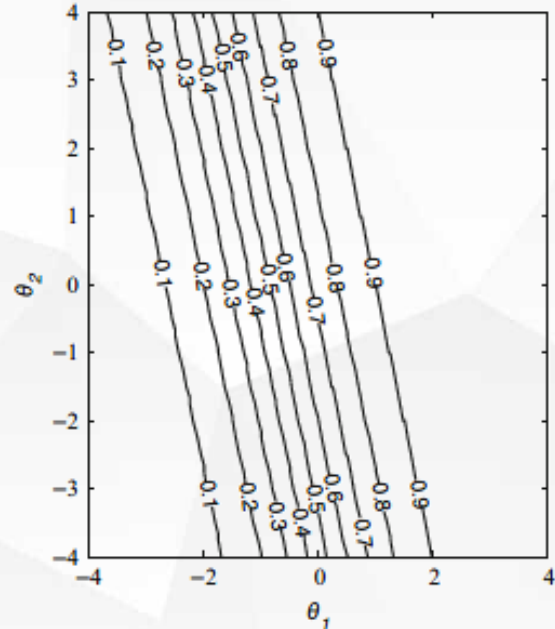
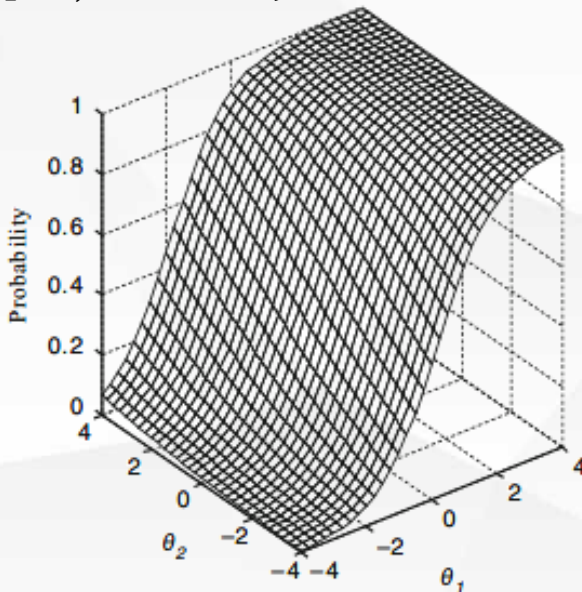
项目反应概率在 θ_2 的方向变化得更快。



多维项目反应理论：项目反应曲面 (Item Response Surface, IRS)

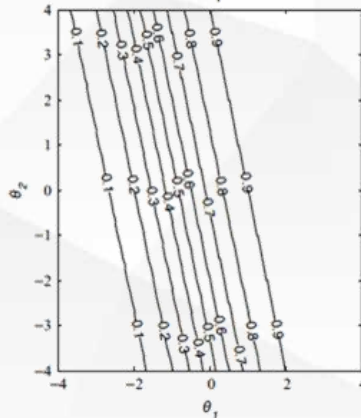
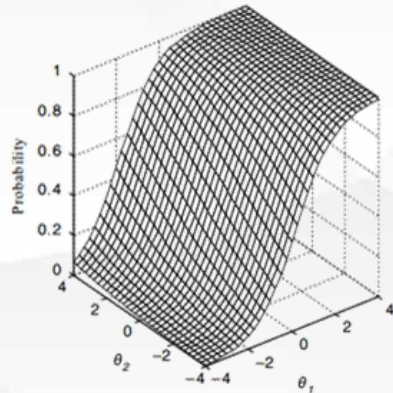
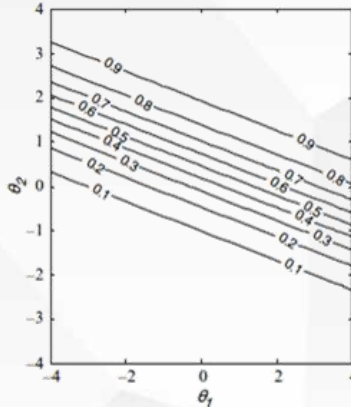
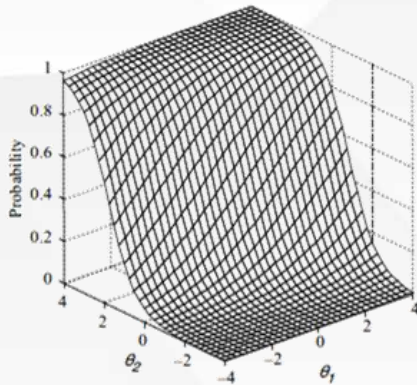
► 题目2:

考察两种能力， θ_1 和 θ_2 ； 区分度分别是1.2和0.3 ($a=[1.2$
0.3])； 截距参数 d 等于1。





多维项目反应理论：项目反应曲面 (Item Response Surface, IRS)



➤ 向量 a 表示：
整个曲面的
斜率，题目
正确作答概
率的方向。



多维项目反应理论：项目反应曲面 (Item Response Surface , IRS)

- 截距参数 d 是什么？
- 难度参数 b 如何表示？



多维项目反应理论：项目反应曲面 (Item Response Surface, IRS)

- 截距参数 d 是什么？
- 难度参数 b 如何表示？

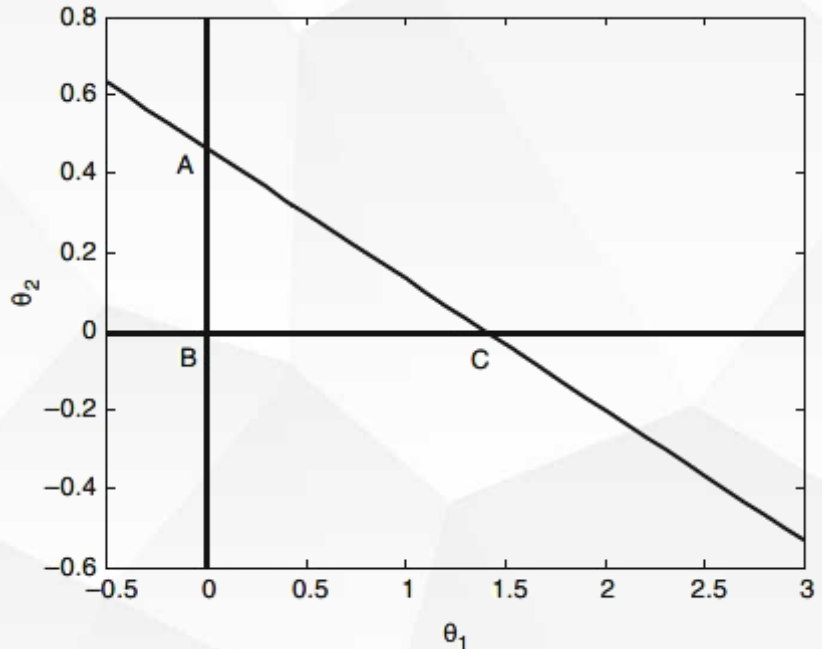
$$a(\theta - b) = a\theta - ab$$

$$a\theta + d$$



多维项目反应理论：项目反应曲面 (Item Response Surface , IRS)

- $BA = 0.47$
 $BC = 1.4$
- 这道题的难度是0.47还是1.4呢？



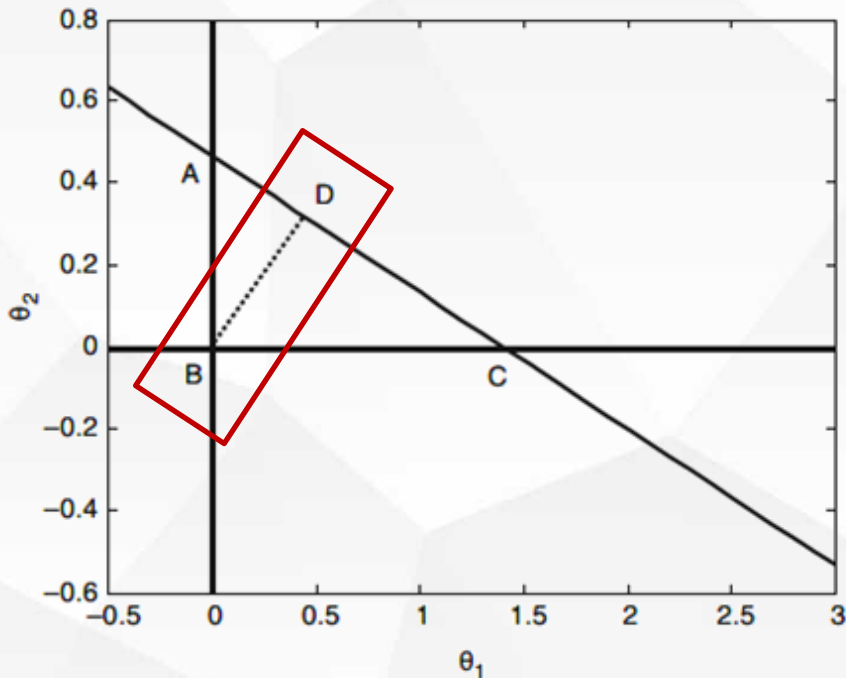


多维项目反应理论：项目反应曲面 (Item Response Surface , IRS)

➤ 表达式：

$$b = \frac{-d}{\sqrt{\mathbf{a}\mathbf{a}'}} = \frac{-d}{\sqrt{\sum_{v=1}^m a_v^2}}$$

在MIRT里的难度**b**称为MDIFF。



- 多维项目反应理论的提出是为了更深入地了解被试，结合多方面的信息，为对被试的评估或诊断提供有用的帮助。



Thank you for your attention!